Comparaison de deux perturbations singulières pour l'équation de Burgers avec conditions aux limites

Marguerite Gisclon

Comparaison de deux perturbations singulières pour l'équation de Burgers avec conditions aux limites

Marguerite GISCLON
UMPA, CNRS - UMR n^{o}128,
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07
FRANCE

Résumé - dans cette Note, on s'intéresse à l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\frac{u^2}{2})}{\partial x}(x,t) = 0,$$

dans le quart de plan $x > 0,\ t > 0$, que l'on perturbe par une diffusion de viscosité $\varepsilon > 0$. On introduit deux conditions aux limites, une non linéaire, l'autre de Dirichlet. La limite quand ε tend vers zéro a été étudiée par K.T. Joseph et P. Le Floch respectivement. On montre que les deux limites sont égales.

Comparison between two singular perturbations for Burgers equation with boundary conditions

Abstract - we consider the Burgers equation with a small viscosity coefficient $\varepsilon > 0$ in the quarter plane $x > 0,\ t > 0$, with two different boundary conditions ; the first being a non linear boundary condition, the second being the Dirichlet's boundary condition. We adapt the methods of K.T. Joseph and P. Le Floch to show that the two limits obtained are the same.

1 La solution de K. T. Joseph

Considérons le problème mixte suivant :

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\frac{u_\varepsilon^2}{2})}{\partial x}(x,t) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ x > 0, \\ \varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(0,t) - u_\varepsilon^2(0,t) = 0,\ t > 0, \end{cases}$$

avec l'hypothèse $u_0(x) \in L^\infty(0,\infty)$.

K.T. Joseph a trouvé pour chaque (x,t) fixés, la limite quand ε tend vers 0^+ de l'unique solution du problème (P) :

Théorème 1 *(K. T. Joseph) - Pour chaque (x,t) fixés, $x>0$, $t>0$, on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) = \frac{x-y_1(x,t)}{t},$$

où $y_1(x,t)$ minimise $y(\geq 0) \mapsto F_1(x,y,t)$ avec :

$$F_1(x,y,t) = \int_0^y u_0(z)dz + \frac{(x-y)^2}{2t}.$$

Ce théorème nous permet déjà d'avoir la condition aux limites suivante :

Propriété 1 - *On a :* $\limsup_{x\to 0^+} u(x,t) \leq 0.$

2 La solution de Bardos-Leroux-Nédélec

Ceci nous amène, d'après l'inégalité d'entropie, à comparer u avec la solution de Bardos-Leroux-Nédélec donnée par :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} ||\bar{u}_\varepsilon(x,t) - \bar{u}(x,t)||_{L^1([0,\infty)\times[0,T])} = 0,$$

pour chaque T fixé, où $\bar{u}_\varepsilon(x,t)$ est la solution de :

$$(\bar{P}) \begin{cases} \frac{\partial \bar{u_\varepsilon}}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\frac{\bar{u_\varepsilon}^2}{2})}{\partial x}(x,t) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 \bar{u_\varepsilon}}{\partial x^2}(x,t),\ x>0,\ t>0, \\ \bar{u_\varepsilon}(x,0) = u_0(x),\ x>0, \\ \bar{u_\varepsilon}(0,t) = 0,\ t>0. \end{cases}$$

On sait, d'après P. Le Floch, que $\bar{u}(x,t)$ est continue par morceaux, possède sur les demi-droites $x=0$ et $t=0$ des traces mesurables bornées et satisfait les propriétés :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\frac{\bar{u}^2}{2})}{\partial x}(x,t) = 0,\ x>0,\ t>0, \\ \bar{u}(x,0) = u_0(x),\ x>0, \\ \bar{u}(0,t) \leq 0,\ t>0. \end{cases}$$

Notons $\gamma(t) = \frac{\bar{u}^2(0,t)}{2},\ t>0.$

3 Les deux solutions sont identiques

Notre résultat est le suivant :

Proposition 1 - *On a $u(x,t) = \bar{u}(x,t)$, $\forall x > 0$, $\forall t > 0$, c'est-à-dire les solutions des problèmes (P) et $(\bar{P})$ convergent vers la même limite quand ε tend vers zéro.*

Démonstration : on veut comparer u et $\bar{u}$.
Or, $\bar{u}$ est explicitement donnée de la façon suivante :

Théorème 2 *(P. Le Floch) - On a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \bar{u}_\varepsilon(x,t) = \bar{u}(x,t) = \frac{x - y(x,t)}{t}, \ x > 0, \ t > 0,$$

où $y(x,t)$ minimise $y(\in \mathbb{R}) \mapsto G(x,y,t)$ avec :

$$G(x,y,t) = \begin{cases} F_1(x,y,t), \ y \geq 0, \\ \\ F_2(x,y,t) = -\int_0^{\frac{-ty}{x-y}} \gamma(z)dz + \frac{x(x-y)}{2t}, \ y \leq 0. \end{cases}$$

On remarque qu'il suffit donc de montrer que : $y(x,t) \geq 0, \ \forall x > 0, \ \forall t > 0$.
Raisonnons par l'absurde. On suppose que : $\exists x > 0, \ \exists t > 0$ tels que $y(x,t) < 0$.
D'où :

$$-\int_0^t \gamma(z)dz + \frac{x(x - y(x,t))}{2t} \leq -\int_0^{\frac{-ty(x,t)}{x-y(x,t)}} \gamma(z)dz + \frac{x(x-y(x,t))}{2t} = F_2(x, y(x,t), t)$$

(car $y(x,t) < 0$ donc $t \geq \frac{-ty(x,t)}{x-y(x,t)}$)

$$\leq F_1(x,y,t), \ \forall y \geq 0,$$

d'après la définition de $y(x,t)$.
Pour chaque $t > 0$, soit $Y(t)$ un point qui minimise la fonction :

$$y \geq 0 \mapsto \int_0^y u_0(s)ds + \frac{y^2}{2t} = G(0,y,t).$$

Alors la fonction Y est croissante (donc continue sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable de points, donc bien définie presque partout).

Donc :

$$-\int_0^t \gamma(z)dz + \frac{x(x - y(x,t))}{2t} \leq F_1(x, Y(t), t) = \int_0^{Y(t)} u_0(z)dz + \frac{(x - Y(t))^2}{2t}.$$

De plus, comme $\bar{u_\varepsilon}(0,t)=0,\ t>0$, on a

$$\int_0^t \gamma(z)dz + \int_0^{Y(t)} u_0(z)dz + \frac{Y(t)^2}{2t} = 0, \tag{1}$$

donc

$$-\int_0^t \gamma(z)dz + \frac{x(x-y(x,t))}{2t} \leq -\int_0^t \gamma(z)dz - \frac{Y(t)^2}{2t} + \frac{(x-Y(t))^2}{2t},$$

et en simplifiant, on obtient :

$$y(x,t) \geq 2Y(t) \geq 0,$$

ce qui est impossible vu que $y(x,t)<0.\square$

Le but du dernier paragraphe est de prouver l'égalité (1).

4 La formule explicite de P. Le Floch

Plaçons nous dans le cas général où $\bar{u_\varepsilon}(0,t)$ n'est pas forcément nulle.

On note :

$$a(t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \bar{u}_\epsilon(0,t).$$

On définit la fonction $m=m(t),\ t>0$ par :

$$m(t) = \int_0^t \gamma(s)ds + \min_{y\geq 0} G(0,y,t). \tag{2}$$

Comme Y est croissante, pour presque tout $t>0$, le minimum dans (2) a lieu pour un unique point $Y(t)$. La fonction m est donc définie presque partout.

De plus, elle est positive ou nulle, continue, presque partout différentiable, égale à 0 en $t=0$.

Sa dérivée est :

$$m'(t) = \gamma(t) - \frac{Y^2(t)}{2t^2},$$

pour presque tout $t>0$, ce qui caractérise $\bar{u}(0,t)^2$ si on connait m.

Or, nous déduisons que $m=m(t)\geq 0,\ t>0$ est l'unique fonction continue presque partout différentiable telle que :

$$m(0^+) = 0$$

et

$$(m'(t) - \frac{a^2(t)}{2} + \frac{Y^2(t)}{2t^2})(\phi(t)-m(t)) \geq 0,\ \forall\phi\geq 0,\ t>0. \tag{3}$$

Dans le cas qui nous intéresse, $a(t) = 0$, on a $m(t) = 0$ d'après (3) et on retrouve (1) grâce à (2).$\square$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

[1] K.T. Joseph, The Burgers equation with a nonlinear boundary condition, Préprint, TIFR, Bangalore, 1991.

[2] C. Bardos, A.Y. Leroux et J.C. Nédélec, First order quasilinear equations with boundary conditions, Communications in Partial Differential Equations, 4, n^{o}9, 1979, p $1017 - 1034$.

[3] P. Le Floch, Explicit Formula for Scalar Non-Linear Conservation Laws with Boundary Condition, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 10, 1988, p $265 - 287$.